제3교시

2017학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역 나형

성명	

수험번호							

- ◯ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- ◯ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.
- ◯ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- ◯ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- ◯ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

공 란

1. $\left(2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{4}{3}}\right)^{-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{3^{n+1} - 2^n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

3. 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르는 확률변수 X의 평균이 5일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

4. 실수 x에 대한 두 조건

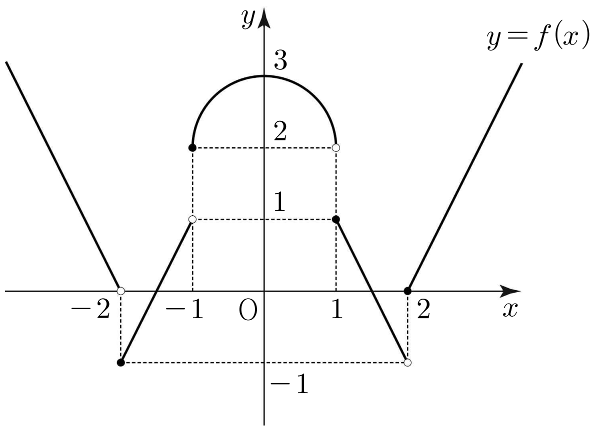
$p : x^2-(2+a)x+2a \le 0$

$q : x^2-2x-15 \le 0$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 a의 개수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

5. 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x-2)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6. 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. $\mathrm{P}(B|A) - \mathrm{P}(B|A^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

7. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 등식

$$\log_3 a = \frac{1}{\log_b 27}$$

이 성립할 때, $\log_a b^2 + \log_b a^2$의 값은? [3점]

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$

8. 함수 $f(x) = x(x-3)(x-a)$의 그래프 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 점 $(3,\ 0)$에서의 접선이 서로 수직이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

9. 주머니 속에 흰 공이 5개, 검은 공이 3개 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나오는 검은 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

10. 집합 $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에 대하여 집합 P를

$$P=\left\{\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\frac{x_3}{10^3}\,\middle|\, x_1\in A,\ x_2\in A,\ x_3\in A\right\}$$

라 하자. 집합 P의 원소 중 41번째로 큰 원소는 $\frac{a}{10}+\frac{b}{10^2}+\frac{c}{10^3}$이다. $a+b+c$의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

11. 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생을 임의로 3명, 3명, 2명씩 3개의 조로 나눌 때, 두 학생 A, B가 같은 조에 속할 확률은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

12. 어느 공장에서 생산하는 군용 위장크림 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의로 택한 1개의 무게가 50 이상일 확률은 0.1587이다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의추출한 4개의 무게의 평균이 50 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.3085 ⑤ 0.4332

13. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^4-4x^3+12x \geq 2x^2+a$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [3점]

① -11 ② -10 ③ -9 ④ -8 ⑤ -7

14. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 두 함수 $f: A \to B$, $g: B \to A$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3)=5$, $g(2)=3$
(나) 어떤 $x \in B$에 대하여 $g(x)=x$이다.
(다) 모든 $x \in A$에 대하여 $(f \circ g \circ f)(x)=x+1$이다.

$f(1)+g(3)$의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

15. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_6 - S_3 = 6,\ S_{12} - S_6 = 72$$

일 때, $a_{10} + a_{11} + a_{12}$의 값은? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60

16. 이차함수 $f(x)=x^2+mx-8$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$는 $x=\alpha$에서 극소이다. α의 값은? (단, m은 상수이다.)

[4점]

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

17. 주머니에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 다섯 개의 구슬이 들어 있다. 주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼내어 구슬에 적혀 있는 숫자를 확인한 후 다시 넣는다.
이와 같은 시행을 4회 반복하여 얻은 4개의 수 중에서 3개의 수의 합의 최댓값을 N이라 하자.
다음은 $N \geq 14$일 확률을 구하는 과정이다.

(ⅰ) $N=15$인 경우

5가 적힌 구슬이 4회 나올 확률은 $\frac{1}{625}$이고,

5가 적힌 구슬이 3회, 4 이하의 수가 적힌 구슬 중 한 개가 1회 나올 확률은 $\frac{\boxed{(가)}}{625}$이다.

(ⅱ) $N=14$인 경우

5가 적힌 구슬이 2회, 4가 적힌 구슬이 2회 나올 확률은 $\frac{6}{625}$이고,

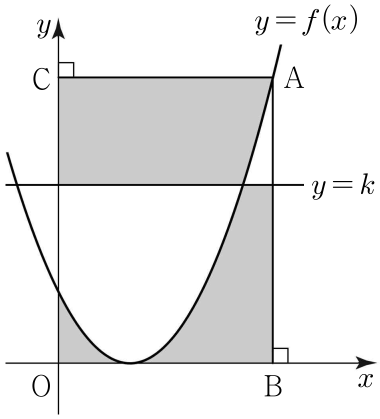
5가 적힌 구슬이 2회, 4가 적힌 구슬이 1회, 3 이하의 수가 적힌 구슬 중 한 개가 1회 나올 확률은 $\frac{\boxed{(나)}}{625}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{\boxed{(다)}}{625}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 96 ② 101 ③ 106 ④ 111 ⑤ 116

18. 그림과 같이 함수 $f(x)=(x-1)^2$의 그래프 위의 점 A$(3,\ 4)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하자. 직사각형 OBAC의 내부에서 연립부등식 $\begin{cases} y \le f(x) \\ y \le k \end{cases}$를 만족시키는 영역의 넓이를 S_1, 직사각형 OBAC의 내부에서 연립부등식 $\begin{cases} y \ge f(x) \\ y \ge k \end{cases}$를 만족시키는 영역의 넓이를 S_2라 하자. $S_1 = S_2$일 때, 상수 k의 값은? (단, $1<k<4$이다.) [4점]

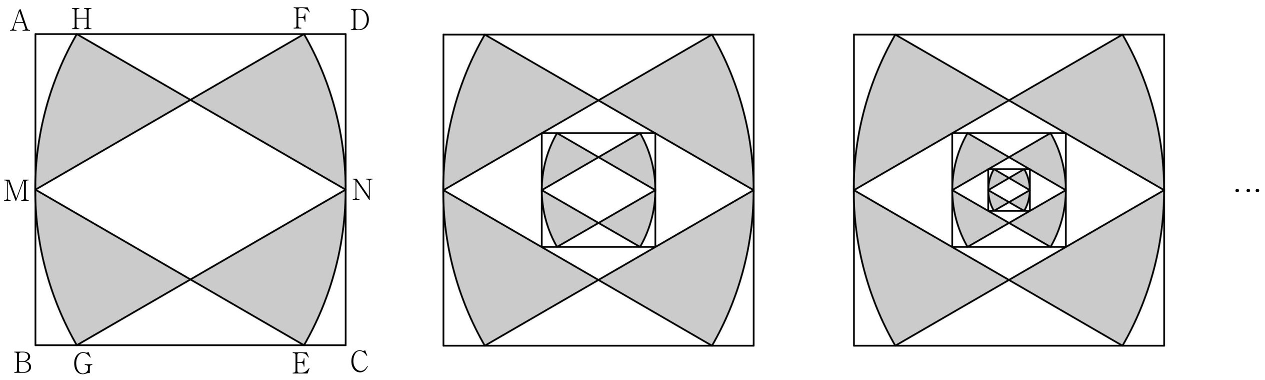


① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD가 있다. 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 두 선분 BC, AD 위에 $\overline{\mathrm{ME}}=\overline{\mathrm{MF}}=\overline{\mathrm{AB}}$가 되도록 각각 점 E, F를 잡고, 중심이 M인 부채꼴 MEF를 그린다. 두 선분 BC, AD 위에 $\overline{\mathrm{NG}}=\overline{\mathrm{NH}}=\overline{\mathrm{AB}}$가 되도록 각각 점 G, H를 잡고, 중심이 N인 부채꼴 NHG를 그린다. 두 부채꼴 MEF, NHG의 내부에서 공통부분을 제외한 나머지 부분에 와 같이 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 부채꼴 MEF, NHG의 공통부분인 마름모의 각 변에 꼭짓점이 있고, 네 변이 정사각형 ABCD의 네 변과 각각 평행한 정사각형을 그린다. 새로 그려진 정사각형에 그림 R_1을 얻은 방법과 같은 방법으로 2개의 부채꼴을 각각 그린 다음 2개의 부채꼴의 내부에서 공통부분을 제외한 나머지 부분에 와 같이 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

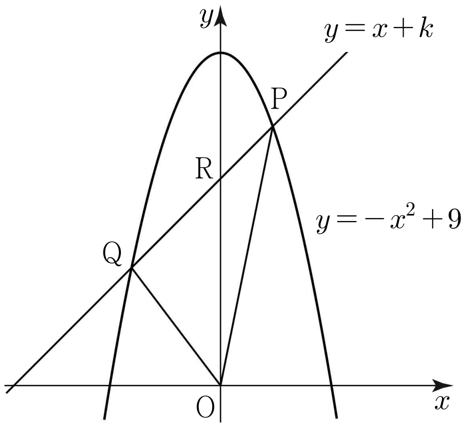


R_1 R_2 R_3 …

① $8\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$ ② $9\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$ ③ $10\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$

④ $11\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$ ⑤ $12\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$

20. 그림과 같이 직선 $y=x+k\ (3<k<9)$가 곡선 $y=-x^2+9$와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, y축과 만나는 점을 R라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이고, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.) [4점]



<보 기>

ㄱ. 선분 PQ의 중점의 x좌표는 $-\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $k=7$일 때, 삼각형 ORQ의 넓이는 삼각형 OPR의 넓이의 2배이다.

ㄷ. 삼각형 OPQ의 넓이는 $k=6$일 때 최대이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$가 있다. 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ t-f(x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 개수를 $h(t)$라 하자. 예를 들어 $h(0)=3$이다. $h(t)=3$을 만족시키는 모든 정수 t의 개수는? [4점]

① 55 ② 57 ③ 59 ④ 61 ⑤ 63

22. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=1$, $a_5=7$일 때, a_9의 값을 구하시오. [3점]

23. 두 함수 $f(x)=4x+5$, $g(x)=\sqrt{2x+1}$에 대하여 $(f \circ g^{-1})(3)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{2x^2 - x - 1} = \frac{1}{2}$
(나) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{2x^2 - x - 1} = 4$

$f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

25. 방정식 $(x+y+z)(s+t)=49$를 만족시키는 자연수 x, y, z, s, t의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ s,\ t)$의 개수를 구하시오. [3점]

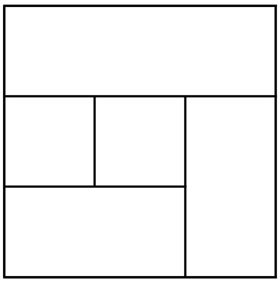
26. 사관학교에서는 사관생도들에게 세 국가 A, B, C 에서 해외 파견 교육을 받을 수 있도록 하고 있다. 해외 파견 교육 대상 사관생도를 선발하기 위해 희망자를 조사하였더니 하나 이상의 국가를 신청한 사관생도의 수가 70 명이었고, 그 결과는 다음과 같았다.

(가) A 또는 B를 신청한 사관생도는 43 명이다.
(나) B 또는 C를 신청한 사관생도는 51 명이다.
(다) A와 C를 동시에 신청한 사관생도는 없다.

B를 신청한 사관생도의 수를 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 5개의 영역으로 나누어진 도형을 서로 다른 4가지 색을 사용하여 모든 영역을 칠하려고 한다. 다음 조건을 만족시키도록 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 경계가 일부라도 닿은 두 영역은 서로 이웃한 영역으로 본다.) [4점]

(가) 4가지의 색의 전부 또는 일부를 사용한다. (나) 서로 이웃한 영역은 서로 다른 색으로 칠한다.



28. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에 대하여

$$X \not\subset A,\ X \not\subset B,\ X \subset (A \cup B)$$

를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

29. 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$이 서로 다른 네 점에서 만날 때, 이 네 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형을 만든다. 이 직사각형에서 긴 변의 길이가 짧은 변의 길이의 2배가 되도록 하는 k의 값을 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} f(n)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \geq 0$일 때, $f(x)=x^2-2x$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)+f(x)=0$이다.

실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[t, t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

좌표평면에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

공 란