

제3교시

2017학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역 가 형

성명		수험번호							
----	--	------	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 먼저 **문제지**의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하십시오.
- **답안지**의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, '0'이 포함된 경우에는 '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하십시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

공 란

1.  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$  의 값은? [2점]

①  $\frac{1}{10}$

②  $\frac{1}{8}$

③  $\frac{1}{6}$

④  $\frac{1}{4}$

⑤  $\frac{1}{2}$

2. 이항분포  $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르는 확률변수  $X$ 의 평균이 5일 때, 자연수  $n$ 의 값은? [2점]

① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

3. 좌표공간에서 세 점  $A(6, 0, 0)$ ,  $B(0, 3, 0)$ ,  $C(0, 0, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형  $ABC$ 의 무게중심을  $G$ 라 할 때, 선분  $OG$ 의 길이는? (단,  $O$ 는 원점이다.) [2점]

①  $\sqrt{2}$                       ② 2                      ③  $\sqrt{6}$                       ④  $2\sqrt{2}$                       ⑤  $\sqrt{10}$

4. 자연수 10의 분할 중에서 짝수로만 이루어진 것의 개수는? [3점]

① 7                      ② 8                      ③ 9                      ④ 10                      ⑤ 11

5. 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나오는 사건을  $A$ , 소수의 눈이 나오는 사건을  $B$  라 하자.  $P(B|A) - P(B|A^C)$  의 값은? (단,  $A^C$ 은  $A$ 의 여사건이다.) [3점]

- ①  $-\frac{1}{3}$       ②  $-\frac{1}{6}$       ③ 0      ④  $\frac{1}{6}$       ⑤  $\frac{1}{3}$

6.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^{\sec x}$  의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{e^2}$       ②  $\frac{1}{e}$       ③ 1      ④  $e$       ⑤  $e^2$

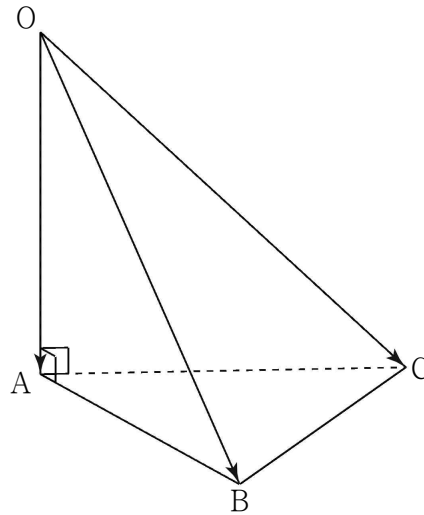
7. 확률변수  $X$ 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$X$	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$a$	$b$	$c$	1

$E(X)=1$ ,  $V(X)=\frac{1}{4}$  일 때,  $P(X=0)$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{32}$       ②  $\frac{1}{16}$       ③  $\frac{1}{8}$       ④  $\frac{1}{4}$       ⑤  $\frac{1}{2}$

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형  $ABC$ 를 밑면으로 하고  $\overline{OA}=2$ ,  $\overline{OA} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{OA} \perp \overline{AC}$ 인 사면체  $OABC$ 가 있다.  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|$ 의 값은? [3점]

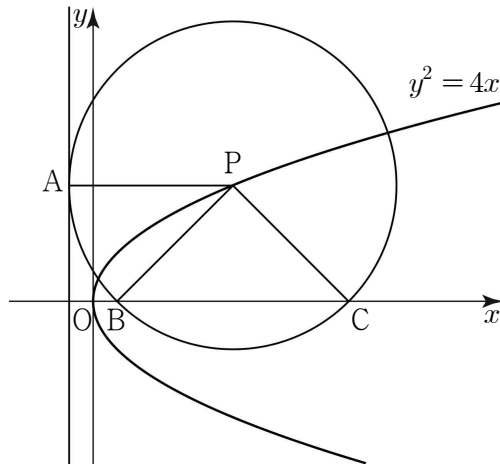


- ① 2      ②  $2\sqrt{2}$       ③  $2\sqrt{3}$       ④ 4      ⑤  $2\sqrt{5}$

9. 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생을 임의로 3명, 3명, 2명씩 3개의 조로 나눌 때, 두 학생 A, B가 같은 조에 속할 확률은? [3점]

- ①  $\frac{1}{8}$       ②  $\frac{1}{4}$       ③  $\frac{3}{8}$       ④  $\frac{1}{2}$       ⑤  $\frac{5}{8}$

10. 그림과 같이 포물선  $y^2 = 4x$  위의 한 점 P를 중심으로 하고 준선과 점 A에서 접하는 원이  $x$ 축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 부채꼴 PBC의 넓이가 부채꼴 PAB의 넓이의 2배일 때, 원의 반지름의 길이는? (단, 점 P의  $x$ 좌표는 1보다 크고, 점 C의  $x$ 좌표는 점 B의  $x$ 좌표보다 크다.) [3점]



- ①  $2+2\sqrt{3}$       ②  $3+2\sqrt{2}$       ③  $3+2\sqrt{3}$       ④  $4+2\sqrt{2}$       ⑤  $4+2\sqrt{3}$

11. 어느 공장에서 생산하는 군용 위장크림 1개의 무게는 평균이  $m$ , 표준편차가  $\sigma$ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의로 택한 1개의 무게가 50 이상일 확률은 0.1587이다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의추출한 4개의 무게의 평균이 50 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.) [3점]

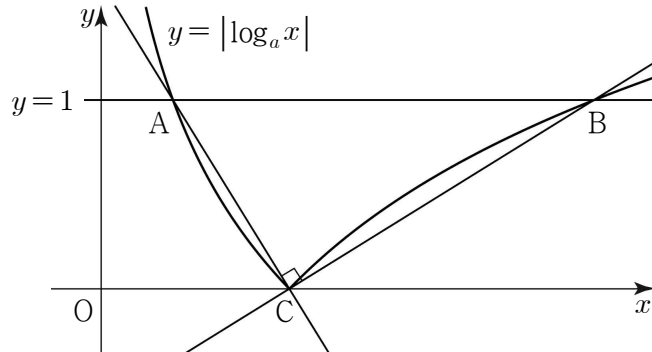
$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.0228      ② 0.0668      ③ 0.1587      ④ 0.3085      ⑤ 0.4332

12. 곡선  $y = \tan \frac{x}{2}$  와 직선  $x = \frac{\pi}{2}$  및  $x$  축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

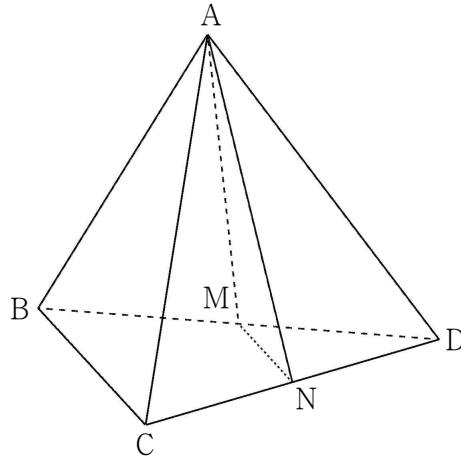
- ①  $\frac{1}{4} \ln 2$       ②  $\frac{1}{2} \ln 2$       ③  $\ln 2$       ④  $2 \ln 2$       ⑤  $4 \ln 2$

13. 그림과 같이 곡선  $y = |\log_a x|$ 가 직선  $y=1$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하고  $x$ 축과 만나는 점을 C라 하자. 두 직선 AC, BC가 서로 수직이 되도록 하는 모든 양수  $a$ 의 값의 합은?  
(단,  $a \neq 1$ ) [3점]



- ① 2                      ②  $\frac{5}{2}$                       ③ 3                      ④  $\frac{7}{2}$                       ⑤ 4
14. 같은 종류의 볼펜 6개, 같은 종류의 연필 6개, 같은 종류의 지우개 6개가 필통에 들어 있다.  
이 필통에서 8개를 동시에 꺼내는 경우의 수는? (단, 같은 종류끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]
- ① 18                      ② 24                      ③ 30                      ④ 36                      ⑤ 42

15. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12인 정사면체 ABCD에서 두 모서리 BD, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 사각형 BCNM의 평면 AMN 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



- ①  $\frac{15\sqrt{11}}{11}$       ②  $\frac{18\sqrt{11}}{11}$       ③  $\frac{21\sqrt{11}}{11}$       ④  $\frac{24\sqrt{11}}{11}$       ⑤  $\frac{27\sqrt{11}}{11}$

16. 자연수  $n$ 에 대하여  $S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}$  이라 할 때, 다음은  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값을 구하는 과정이다.

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2} = \boxed{(가)} - (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{1+x^2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} \\ &= \int_0^1 \{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2}\} dx \\ &= \int_0^1 \boxed{(가)} dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

이다. 한편,  $0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$  이므로

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \boxed{(나)}$$

이다. 따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = 0$  이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)} dx$  이다.

$x = \tan \theta \left( -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} d\theta = \boxed{(다)}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각  $f(x)$ ,  $g(n)$ , (다)에 알맞은 수를  $k$ 라 할 때,  $k \times f(2) \times g(2)$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{\pi}{40}$       ②  $\frac{\pi}{60}$       ③  $\frac{\pi}{80}$       ④  $\frac{\pi}{100}$       ⑤  $\frac{\pi}{120}$

17. 좌표공간에 평행한 두 평면  $\alpha : 2x - y + 2z = 0$ ,  $\beta : 2x - y + 2z = 6$  위에 각각 점  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 0, 1)$ 이 있다. 평면  $\alpha$  위의 점  $P$ 와 평면  $\beta$  위의 점  $Q$ 에 대하여  $\overline{AQ} + \overline{QP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 6                      ②  $\sqrt{37}$                       ③  $\sqrt{38}$                       ④  $\sqrt{39}$                       ⑤  $2\sqrt{10}$

18. 함수  $f(x) = \int_1^x e^{t^3} dt$  에 대하여  $\int_0^1 xf(x) dx$  의 값은? [4점]

①  $\frac{1-e}{2}$

②  $\frac{1-e}{3}$

③  $\frac{1-e}{4}$

④  $\frac{1-e}{5}$

⑤  $\frac{1-e}{6}$

19. 실수  $t$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점  $P$ 가 나타내는 도형의 둘레의 길이를  $f(t)$ 라 하자.

(가) 점  $P$ 는 구  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  위의 점이다.

(나) 점  $A(t+5, 2t+4, 3t-2)$ 에 대하여  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 0는 원점이다.) [4점]

————— <보 기> —————

ㄱ.  $f(0) = \frac{20}{3}\pi$

ㄴ.  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 10\pi$

ㄷ.  $f(t)$ 는  $t = -1$ 에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 지수함수  $f(x) = a^x$  ( $0 < a < 1$ )의 그래프가 직선  $y = x$ 와 만나는 점의  $x$ 좌표를  $b$ 라 하자. 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq b) \\ f^{-1}(x) & (x > b) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,  $ab$ 의 값은? [4점]

①  $e^{-e-1}$

②  $e^{-e-\frac{1}{e}}$

③  $e^{-e+\frac{1}{e}}$

④  $e^{e-1}$

⑤  $e^{e+1}$

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $f(0)=0, f'(0)=1$

(나) 모든 실수  $x, y$ 에 대하여  $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$  이다.

$f(-1)=k$  ( $-1 < k < 0$ ) 일 때,  $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ 의 값을  $k$ 로 나타낸 것은? [4점]

①  $1-k^2$

②  $1-2k$

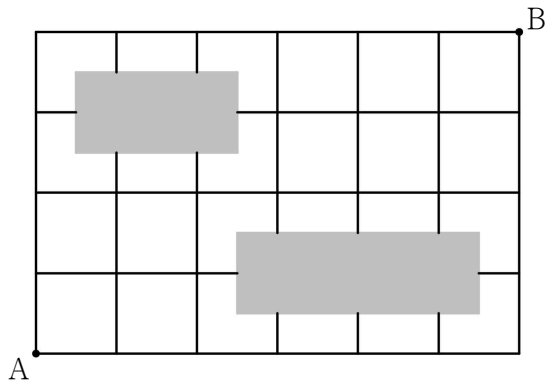
③  $1-k$

④  $1+k$

⑤  $1+k^2$

22.  $\sin^2 \theta = \frac{4}{5}$   $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$  일 때,  $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = p$  이다.  $\frac{1}{p^2}$  의 값을 구하시오. [3점]

23. 어느 부대가 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 장애물(어두운 부분)을 피해 A 지점에서 B 지점으로 도로를 따라 이동하려고 한다. A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오. [3점]



24. 두 초점  $F, F'$  을 공유하는 타원  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{16} = 1$  과 쌍곡선  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$  이 있다. 타원과 쌍곡선이 만나는 점 중 하나를  $P$  라 할 때,  $|\overline{PF}^2 - \overline{PF'}^2|$  의 값을 구하시오. (단,  $a$  는 양수이다.) [3점]

25. 매개변수  $t (t > 0)$  으로 나타내어진 함수

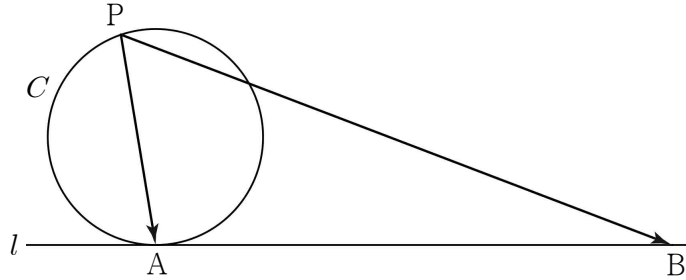
$$x = t^3, y = 2t - \sqrt{2t}$$

의 그래프 위의 점  $(8, a)$  에서의 접선의 기울기는  $b$  이다.  $100ab$  의 값을 구하시오. [3점]

26. 곡선  $y = \sin^2 x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ )의 두 변곡점을 각각 A, B라 할 때, 점 A에서의 접선과 점 B에서의 접선이 만나는 점의  $y$ 좌표는  $p+q\pi$ 이다.  $40(p+q)$ 의 값을 구하시오. (단,  $p, q$ 는 유리수이다.) [4점]

27. 주머니에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 차례로 꺼낸다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수일 때, 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이었을 확률은  $\frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원  $C$ 와 원  $C$  위의 점  $A$ 에서의 접선  $l$ 이 있다.  
 원  $C$  위의 점  $P$ 와  $\overline{AB}=24$ 를 만족시키는 직선  $l$  위의 점  $B$ 에 대하여  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값을  
 구하시오. [4점]

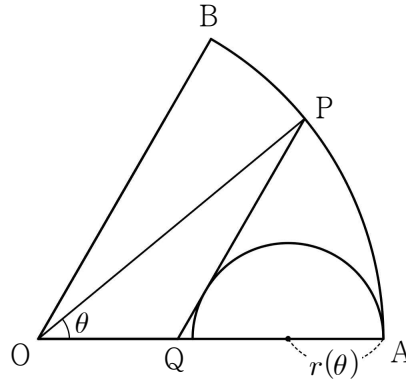


29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가  $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의

점 P를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 Q라 하고  $\angle AOP = \theta$ 라 하자. 점 A를 지름의 한 끝점으로 하고 지름이 선분 AQ 위에 있으며 선분 PQ에 접하는

반원의 반지름의 길이를  $r(\theta)$ 라 할 때,  $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{r(\theta)}{\theta} = a + b\sqrt{3}$ 이다.  $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

(단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이고,  $a, b$ 는 유리수이다.) [4점]



30. 좌표공간에 평면  $z=1$  위의 세 점  $A(1, -1, 1)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(0, 0, 1)$ 이 있다.

점  $P(2, 3, 2)$ 를 지나고 벡터  $\vec{d}=(a, b, 1)$ 과 평행한 직선이 삼각형  $ABC$ 의 둘레 또는 내부를 지날 때,  $|\vec{d}+3\overrightarrow{OA}|^2$ 의 최솟값을 구하시오. (단,  $O$ 는 원점이고,  $a, b$ 는 실수이다.) [4점]

공 란